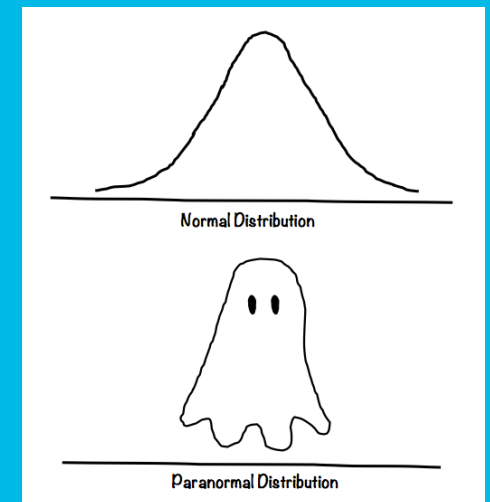


SUM konferensen 13 april 2026
Med fokus på tillgänglighet till lärande
Tema C Praktisk matematik

Osynliga begränsningar i matematikuppgifter:

En studie om tillgänglighet och transposition i åk 6

Anna Lundberg
IBL, Linköpings universitet



Syfte



Syftet med denna studie är att belysa hur möjligheter till lärande i matematik förändras när en läroboksuppgift om proportionalitet i ett algebraiskt sammanhang omsätts i undervisning.



Studien utgår från att elever riskerar gå miste om ett tillgängligt matematiklärande när uppgifter förenklas, omtolkas eller förlorar sina matematiska kärnidéer (Lundberg & Kilhamn, 2018).



Fokus ligger på hur kunskap att undervisa (knowledge to be taught) förskjuts till kunskap som faktiskt undervisas (knowledge taught), i linje med didaktiska transpositionsprocesser beskriva inom ATD (Chevallard, 2006)

Två definitioner av proportionalitet

- Svensk skolkontext: linjär relation, $y = a \cdot x$ där y och x är reella tal och a är proportionalitetskonstanten, nämnd särskilt vid linjära funktioner så kallad detta *dynamisk* proportionalitet,
- *Statisk* proportionalitet Paren (a,b) and (c,d) är positiva reella tal, ,
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

(Miyakawa and Winsløw ([2009](#)))

Vad säger Skolverket?

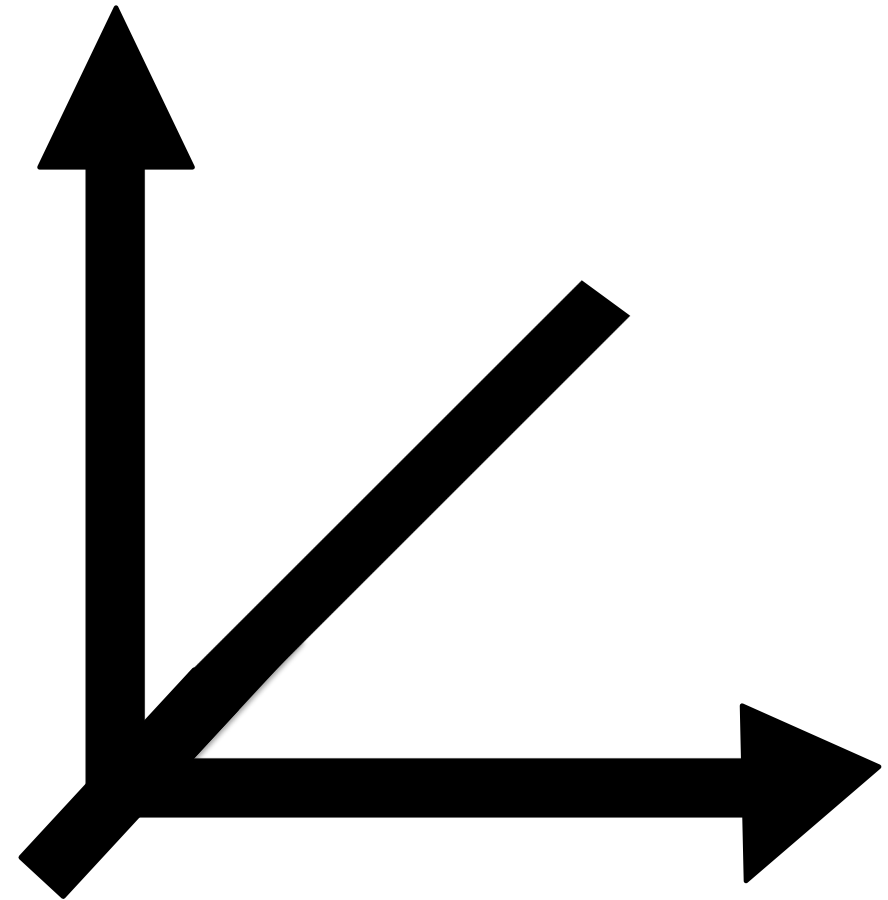
AVOID NEGATIVITY

$$F(x) = |x|$$

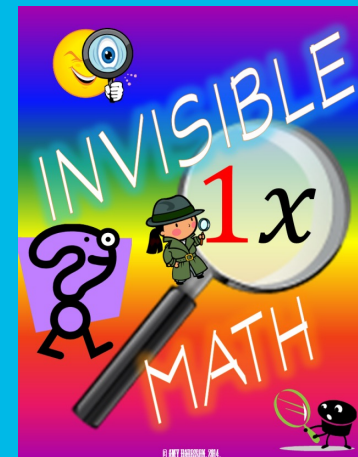
shutterstock.com - 2043074804

Lineära och affina funktioner

- Skolverket kallar korrekt proportionalitet för ett "linjärt samband",
 - dels att rätta linjens ekvation inbegriper både lineära och affina funktioner.
 - Endast rätta linjer genom origo är proportionella, men det påpekar inte Skolverket
- Därför bör lineära och affina funktioner särskiljas för att urskilja proportionella samband bland alla "linjära" funktioner.



Matematikuppgiften i fråga



Algebrauppgift variabler

47 Du ska blanda en "törstsläckare". Du har 5 dl citronjuice, $x = 5$ dl. Hur mycket behöver du av

$$x + 2x + \frac{x}{2} = 7$$

a) vatten

b) socker

$$3,5x = 7$$

$$x = 2$$

48 Hur mycket citronjuice finns det i 7 dl färdigblandad "törstsläckare"?

$$47a) 2 \cdot 5 = 10$$

$$47b) \frac{5}{2} = 2,5$$

- (Carlsson et al., [2004](#), p. 103).

"Törstsläckare"	
x	citronjuice
$2x$	vatten
$\frac{x}{2}$	socker

Varifrån kommer studiens data?

Varifrån kommer materialet?

NORDCORP: NORdic COLlaborative Research Projects

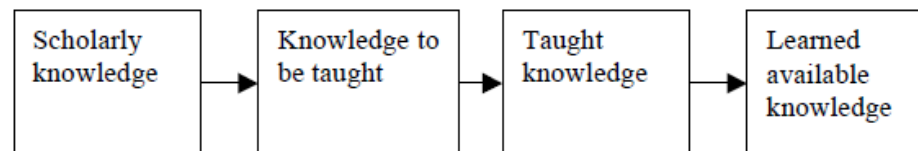
- 3 years project: 2011-2013
- Principal investigator: prof. Roger Säljö, University of Gothenburg, Dep. of Education and The Linnaeus Centre for Research on Learning, Interaction and Mediated Communication in Contemporary Society (LinSC)

Other universities involved:

- Åbo Akademi University, Dep. of Teacher Education, Vasa, Finland (prof. Ole Björkqvist)
- University of Agder, Dep. of Mathematical Sciences, Norway (prof. Maria Luiza Cestari)
- University of California (UCLA), Dep. of Psychology, USA (prof. James W. Stigler; Dr Karen Givvin)

Vilken teori förklarar resultatet?

The Anthropological Theory of the Didactical (ATD)



Figur 10. Den didaktiska transpositionen (Bosch & Gascón, 2006, s. 56)

I denna artikel fokuserar jag på "know-how" i Törstsläcker-uppgiften samt på transpositionen mellan steg 2 och 3

"Reference" mathematical knowledge
(Epistemological model for the research)

Prof. Marianna Bosch, Spain



Prof. Yves Chevallard, France



Praxeologi

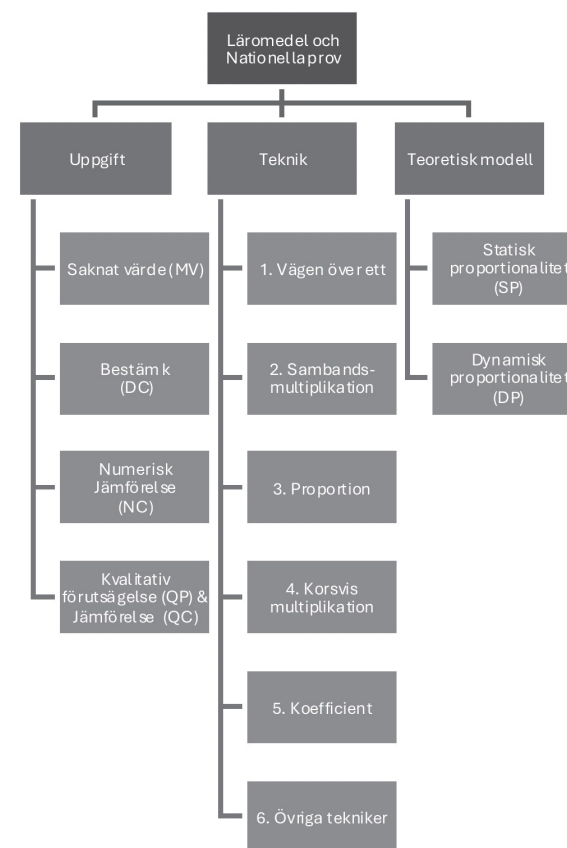
Tabell 2. Praxeologi

”Know-How”	Uppgiftstyp (Type of Task) Teknik (Techniques)
“Know-Why”	Teknologi (Technology) Teori (Theory)

Men hur presenteras proportionalitet på gymnasiet?

Analysinstrument

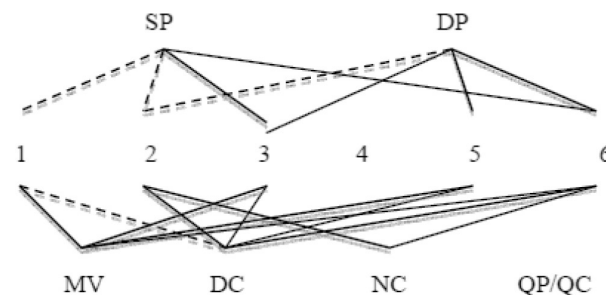
- Från tidigare forskning
- Tre matematikläromedel och nationella prov kurs matematik A från 2000-2010
- Gemensam kurs för samtliga elever på gymnasiet 2011.



Figur 6:1 En översikt till analysverktyget med de tre delarna, Teoretisk modell, Uppgift, och Teknik.

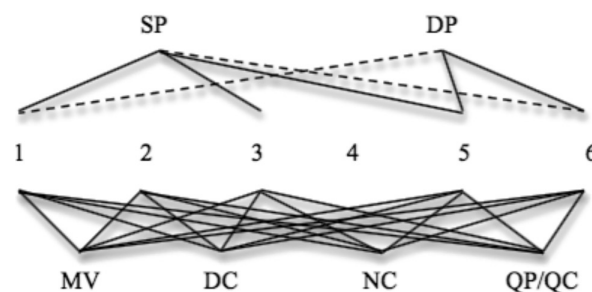
Resultat

- Ingen tydlig koppling mellan teoretisk modell och lösningsteknik
- Inga uppgifter på en kategori QP/QC



Figur 6:2 Resultat läromedel

De funna kopplingarna mellan Teoretiska modeller (SP, DP) Tekniker (1–6) och Uppgiftstyper (MV, DC, NC, QP/QC).

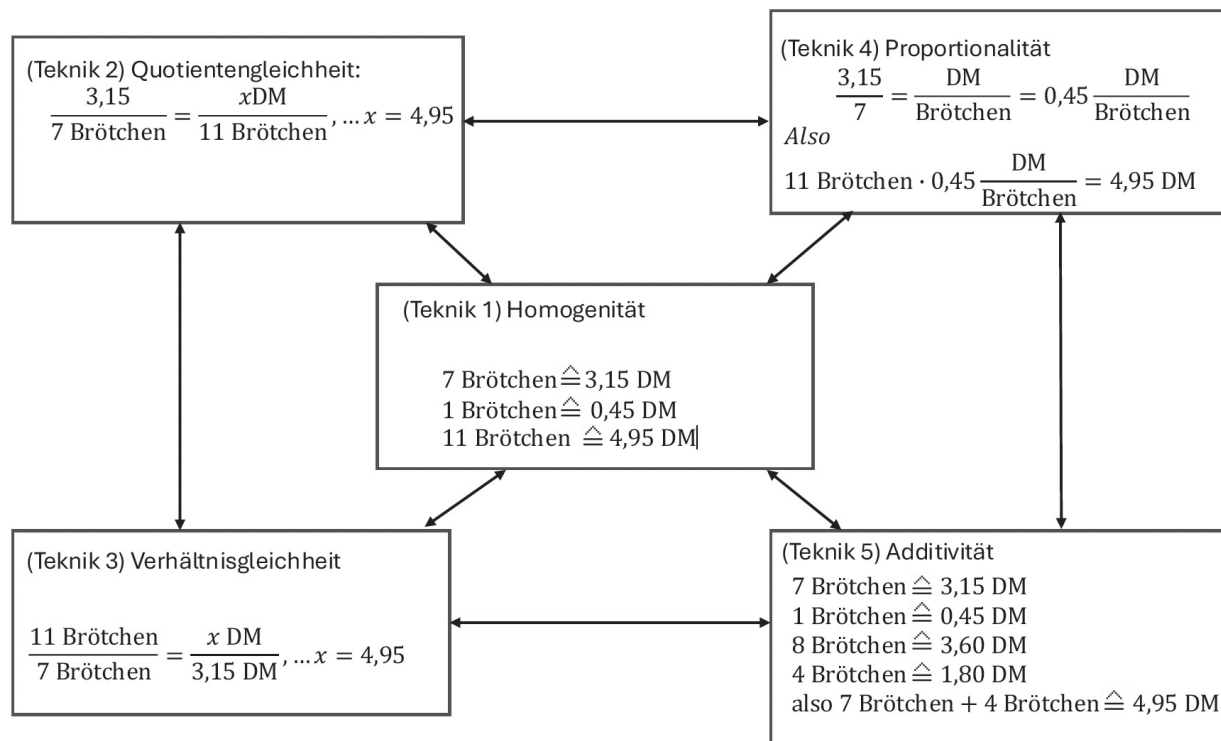


Figur 6:3 Resultat nationella prov

De funna kopplingarna mellan Teoretiska modeller (SP, DP) Tekniker (1–6) och Uppgiftstyper (MV, DC, NC, QP/QC).

Vilka tekniker är möjliga i uppgift 47 och 48 av dessa?

Logos	Technique	Example in task 47	Example in task 48
Static proportionality Dynamic proportionality	Proportionalitetsresonemang Proportionalitetsresonemang	$\frac{\text{water}}{\text{lemon juice}} = \frac{2}{1}$ $\frac{\text{sugar}}{\text{lemon juice}} = \frac{1}{2}$	7 dL:3½ parts = x dL:1 part 1 part:3½ parts = x dL:7 dL The total amount is 3.5 times as much as the amount of lemon juice
– Static proportionality	Talfakta Korsvis multiplikation	$2 \cdot 5 = 10$ –	$7 = 2 \cdot 3.5$ $\left(\frac{7}{3.5} = \frac{x}{1}\right) 7 \cdot 1 = 3 \cdot \frac{1}{2}x$
–	Ekvationslösning	<i>Exchanging x for 5 in each expression to interpret water as</i> $2 \cdot 5 = 10$ and sugar as $\frac{5}{2} = 2.5$.	$x + 2x + \frac{x}{2} = 7$ $3.5x = 7$ $x = 2$



Figur 3:4 Exempel på proportionalitetens komplexitet

Uppgiften som beräknas är: om 7 bröd kostar 3,15 DM. Hur mycket kostar 11 bröd? Ex-
 emplen inspirerade av fem möjliga lösningar från Jordan et al. (2004, s. 161).

Resultat

- Läraren förklarar uppgif 48 7 gånger under flera lektioner
 - Prövning
 - Längd på linjer

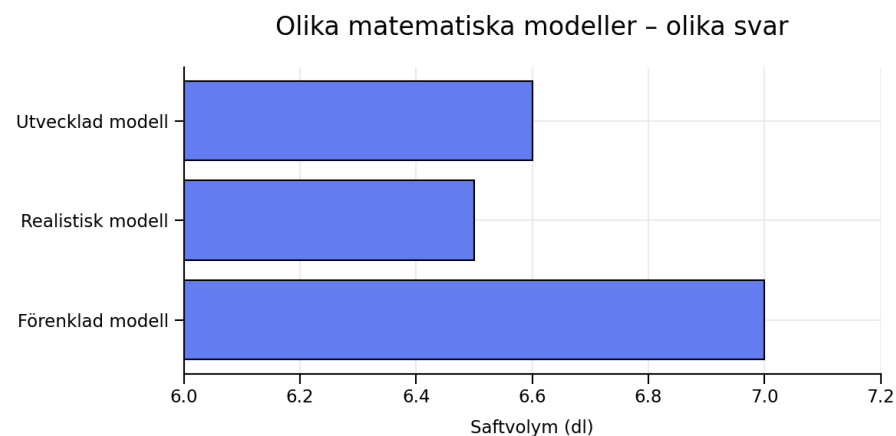
$$\underline{2} + \underline{2} + \underline{2} + \frac{1}{2} = 7dl$$

Svar: 2dl

Jämför Lgr11 med vad som faktiskt undervisades

Kunskap som ska undervisas	Uppgiften i lärobokens kontext	Kunskap som faktiskt undervisas
Vad läraren säger och gör när uppgiften tolkas och förklaras (vid sju tillfällen)		
Logos: teoretiska modeller (teori och teknologi)	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplikativa relationer • Proportionella relationer • Fördubbling och halvering 	<ul style="list-style-type: none"> • Dubbling och halvering
Praxis: uppgift och teknik	<p>Uppgift 47:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representera ett obekant tal med en symbol • Ersätta en bokstav med ett tal • Proportionalitetsresonemang <p>Uppgift 48:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tolka algebraiska uttryck • Första mötet med att ställa upp en ekvation (introduceras i ett senare kapitel) • Lösning genom prövning • Proportionalitetsresonemang 	<p>Uppgift 47:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ersätta en bokstav med ett tal • Aritmetiska beräkningstekniker • Talfakta <p>Uppgift 48:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tolka algebraiska uttryck genom rekontextualisering • Representera summan av ingredienser visuellt som linjer med proportionella längder • Lösning genom prövning • Fördubbling och halvering som implicita exempel på proportionellt resonemang
Modellering	<ul style="list-style-type: none"> • Matematiska modeller kan vara användbara vid lösning av vardagliga situationer • Den valda situationen kräver dock inte att ett okänt representeras med en bokstav om den behandlas som en vardaglig blandningssituation 	<ul style="list-style-type: none"> • Uppgiften förflyttas från vardagskontext till matematisk kontext: <ul style="list-style-type: none"> – Modell 1: Socker löses (vardagskontext) – Modell 2: Socker som lika stor del (matematisk kontext)

Tre tänkbara modeller



- **Realistisk/empirisk modell (ca 6,5 dl)**
Bygger på erfarenhetskunskap: sockret löser sig i vattnet och den totala volymen blir mindre än summan av delarna.
- **Förenklad skolmodell (7 dl)**
Ingen volymförändring beaktas – volymer adderas rakt av. Denna modell används ofta initialt i undervisning.
- **Utvecklad naturvetenskaplig modell (ca 6,6 dl)**
Tar hänsyn till molekylära förklaringar (van der Waals-bindningar), där sockermolekyler placeras mellan vattenmolekyler.

Konklusioner och implikationer

Läraren antar att lösningen på uppgiften ska finnas i lärobokens avsnitt

Proportionalitet nämns under samband och förändring men finns inom flera områden tex algebra.

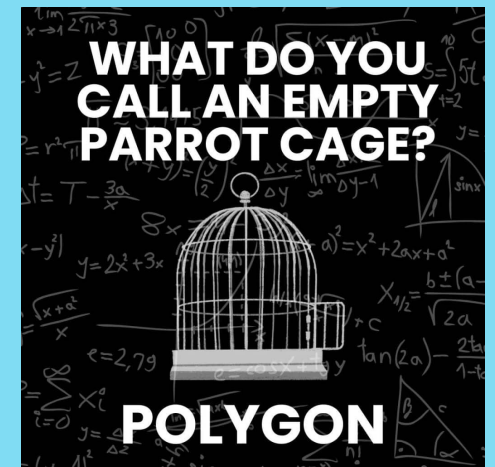
Förtydliga nyckelbegreppen i styrdokument samt att de finns inom flera områden.

redovisa de modeller som finns i uppgiften och diskutera de villkor som följer med modellen ex sockrets löslighet

Referenser

- Carlsson, S., Liljegren, G. & Picetti, M. (2004). *Matte Direkt Matteborgen 6B [Direct math, Mathematics Castle, 6B]*. Stockholm: Bonniers.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). FUNDEMI-1QS and ERME.
- Lundberg, A. L. V., & Kilhamn, C. (2018). Transposition of Knowledge: Encountering Proportionality in an Algebra Task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 559-579. doi:10.1007/s10763-016-9781-3
- Lundberg, A. L. V. (2011). *Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasimatematiken - en studie om läromedel och nationella prov*. [The Concept of Proportionality in the Swedish Upper Secondary School Mathematics – a Study of Textbooks and National Examinations] (Licentiate Dissertation) Linköping, Sweden: Liu-tryck.
- Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 199-218.
- Skolverket. (2021). *Läroplan för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet 2022 (Lgr22)* <https://www.skolverket.se/download/18.645f1c0e17821f1d15c2d8d/1622621584224/Matematik.pdf>

Tack för uppmärksamheten!
Anna Lundberg
anna.v.lundberg@liu.se



This study is funded by NOS-OH (The Joint Committee for Nordic Research Councils for the Humanities and the Social Sciences) and the Research School at the Centre for Educational Science and Teacher Research (CUL), Gothenburg University

liu.se